www.tunisie-etudes.info

Ce document a été téléchargé depuis
www.tunisie-etudes.info

Des documents gratuits, devoirs, examens, cours, exercices, corrigés... Ainsi que toute une rubrique pour vous aider à trouver un emploi sans oublier les avis de concours en direct

Notre page Twitter :
http://www.twitter.com/TunisieEtudes
Notre page FaceBook :
http://www.facebook.com/TunisieEtudes



Merci d'avoir choisi www.tunisie-etudes.info
Bonne lecture et bon travail

INSTITUT NATIONAL DE LA STATISTIQUE ET DES ETUDES ECONOMIQUES

ECOLE NATIONALE DE LA STATISTIQUE ET DE L'ADMINISTRATION ECONOMIQUE

MAI 1990

CONCOURS POUR L'ADMISSION D'ELEVES TITULAIRES STATISTICIENS ECONOMISTES
OPTION MATHEMATIQUES

DEUXIEME COMPOSITION DE MATHEMATIQUES

(Durée : 4 heures)

On se propose dans ce problème de décrire une méthode permettant de trouver les solutions d'un programme d'optimisation du type ;

$$\underset{x_1,\ldots,x_n}{\text{Opt}} \quad f(x_1,\ldots,x_n) \qquad \text{sous} \begin{cases} g_i(x_1,\ldots,x_n) \leqslant 0, & i = 1,\ldots,p, \\ h_j(x_1,\ldots,x_n) = 0, & j = 1,\ldots,q, \end{cases}$$

où Opt désigne soit une maximisation, soit une minimisation, et où les fonctions f, g_i, h_j sont des formes linéaires affines sur $\mathbb{R}^n$.

I

Nous allons commencer par mettre le programme initial sous une forme canonique du type :

$$\underset{x_1,\ldots,x_N}{\text{Max}} \quad c_1 x_1 + \ldots + c_N x_N. \qquad \text{sous} \begin{cases} x_j \geqslant 0 \ , & j = 1,\ldots,N, \\ a_{i1} x_1 + \ldots + a_{iN} x_N = b_i \ , & i = 1,\ldots,m \end{cases}$$

I.1. - Vérifier que toute contrainte à l'inégalité du type $b_1 x_1 + \ldots + b_n x_n \leqslant 0$ peut être remplacée par une contrainte à l'égalité du type $b'_1 x'_1 + \ldots + b'_{n+1} x'_{n+1} = 0$ et une condition de signe $x'_{n+1} \geqslant 0$, où $b'_1,\ldots,b'_{n+1}$ sont des coefficients qui s'expriment en fonction de $b_1,\ldots,b_n$.

I.2. - Montrer que tout argument x_i non soumis à une contrainte de signe peut être écrit : $x_i = x'_i - x''_i$,

où x'_i et x''_i sont tous deux positifs ou nuls.

I.3. - Vérifier que tout programme de minimisation se ramène à un programme de maximisation en changeant la forme de la fonction objectif f.

I.4. - Déduire des trois questions précédentes, une façon de mettre le programme initial sous une forme canonique.

I.5. - Mettre sous forme canonique le programme suivant :

$$\underset{x_1,x_2,x_3}{\text{Max}} \quad (x_1 + 2x_2 + 4x_3) \qquad \text{sous} \begin{cases} x_1 \geqslant 0; \\ x_1 + x_2 = 1, \\ x_1 + 2x_3 \geqslant 2. \end{cases}$$

Dans la suite du problème, nous considérons une telle forme canonique générale. Celle-ci peut être exprimée en terme de matrices. Nous notons :

$$X = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$ le vecteur colonne des arguments,

.../...

$c = (c_1, \ldots, c_n)$ la matrice ligne définissant la fonction objectif,

$A = (a_{ij})$, $b = (b_i)$ les matrices de tailles repectives (m,n) et (m,1) définissant les contraintes.

On suppose que la matrice A est de plein rang m de façon que les contraintes soient indépendantes. On note $P_1, \ldots P_n$ les n vecteurs colonnes de la matrice A. La forme canonique s'écrit :

$$\left\{ \begin{array}{l} \underset{X}{\text{Max}}\ cX \\ \\ \text{sous} \begin{cases} x_j \geqslant 0, \ \forall j, \\ AX = b \end{cases} \end{array} \right. \iff \left\{ \begin{array}{l} \underset{X}{\text{Max}}\ cX \\ \\ \text{sous} \begin{cases} x_j \geqslant 0, \ \forall j, \\ \sum_{j=1}^{n} x_j P_j = b \end{cases} \end{array} \right.$$

II

Une partie C de $\mathbb{R}^n$ est dite convexe si et seulement si

$$\forall X_1, X_2 \in C, \ \forall \alpha \in [0,1], \ \alpha X_1 + (1-\alpha) X_2 \in C.$$

Un vecteur X est un sommet du convexe C si et seulement si :

$$\forall X_1, X_2 \in C, \ \forall \alpha \in]0,1[\qquad X = \alpha X_1 + (1-\alpha) X_2 \implies X_1 = X_2 = X.$$

On admet par la suite le résultat suivant : si C est un convexe fermé de $\mathbb{R}^n$, tout vecteur X de C peut s'écrire : $X = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i X_i$, où $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i = 1$ et où $\forall i = 1, \ldots, n$, $\alpha_i \geqslant 0$ et le vecteur X_i est un sommet de C.
Les sommets $X_1, \ldots, X_n$ peuvent changer avec le vecteur X considéré et, pour un vecteur X donné, la décomposition précédente n'est pas forcément unique.

II.1. - Montrer qu'un demi-espace, ensemble du type :

$$C = \{X : \beta_1 x_1 + \ldots + \beta_n x_n \geqslant \beta_0\}, \qquad \text{est convexe.}$$

II.2. - Vérifier qu'une intersection d'ensembles convexes est convexe.

II.3. - En déduire que l'ensemble $\mathcal{E}$ des vecteurs X de $\mathbb{R}^n$ satisfaisant les contraintes : $\begin{cases} x_j \geqslant 0, \ j = 1, \ldots, n, \\ AX = b, \end{cases}$ est convexe. $\mathcal{E}$ est appelé ensemble des réalisables.

II.4. - Montrer que si la fonction objectif cX atteint sur $\mathcal{E}$ un maximum fini, elle l'atteint au moins en un sommet.

II.5. - Vérifier que si elle l'atteint en deux sommets X_1 et X_2, elle l'atteint aussi en tout point $\alpha X_1 + (1-\alpha) X_2$, avec $1 \geqslant \alpha \geqslant 0$.

.../...

III

III.1. - Supposons que le vecteur b s'écrive : $b = \sum_{k=1}^{K} x_{j_k} P_{j_k}$,

où $x_{j_k} > 0$, $k = 1,\ldots,K$, et où $P_{j_1},\ldots,P_{j_K}$, choisis parmi les n vecteurs colonnes de A, sont des vecteurs indépendants de $\mathbb{R}^m$. Soit X le vecteur dont les composantes sont nulles sauf pour les indices $j_1,\ldots,j_K$, où elles sont respectivement égales à $x_{j_1},\ldots,x_{j_K}$; montrer que ce vecteur X est un sommet de l'ensemble des réalisables.

III.2. - Inversement, soit $X = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$ un sommet de l'ensemble des réalisables, vérifier que les vecteurs colonnes P_j associés aux composantes x_j <u>strictement</u> positives constituent un système libre.

III.3. - En déduire qu'à chaque sommet peut être associée au moins une base de $\mathbb{R}^m$ extraite de $P_1,\ldots,P_n$, sur laquelle b admet des coordonnées positives ou nulles, puis que le nombre de sommets de $\mathcal{E}$ est fini.

III.4. - Mettre sous forme canonique le programme :

$$\max_{x_1,x_2,x_3} \; x_1 + 4x_2 + 2x_3$$

$$\text{sous : } \begin{cases} x_1 \geqslant 0,\ x_2 \geqslant 0,\ x_3 \geqslant 0, \\ x_1 + x_2 \leqslant 1, \\ 2x_1 + x_2 - x_3 \leqslant 2, \\ -x_1 + 2x_2 + x_3 \leqslant 1, \end{cases}$$

et en déduire un sommet évident de l'ensemble des réalisables du programme canonique.

IV

On dira que deux sommets différents de $\mathcal{E}$ sont adjacents, s'ils peuvent être associés à deux bases $P_{j_1},\ldots,P_{j_m}$ et $P_{i_1},\ldots,P_{i_m}$, admettant en commun (m-1) vecteurs.

IV.1. - Considérons un sommet. Par convention nous nous plaçons dans le cas où $(P_1,\ldots,P_m)$ est une base et où ce sommet lui est associé. Soit P_k un autre vecteur colonne de la matrice A. On note :

$$b = x_1^* P_1 + \ldots + x_m^* P_m,$$

$$P_k = x_{k1} P_1 + \ldots + x_{km} P_m.$$

a) Caractériser l'ensemble des vecteurs appartenant à $\mathcal{E}$ et correspondant à une décomposition sur $P_1,\ldots,P_m,P_k$.

b) Vérifier qu'il n'est pas toujours possible d'introduire le vecteur P_k dans la base de façon à obtenir un nouveau sommet, par exemple si $\forall i = 1,\ldots,m\ x_i^* > 0$ et $x_{ki} \leqslant 0$.

c) Montrer que s'il est possible d'introduire le vecteur P_k, un sommet adjacent correspond à une décomposition de b dans laquelle la composante relative à P_k est $\theta_0 = \min_{i\ :\ x_{ki} > 0} \dfrac{x_i^*}{x_{ki}}$.

.../...

IV.2. - Expliquer pourquoi pour notre programme de maximisation seuls sont intéressants les sommets adjacents correspondants aux vecteurs P_k tels que :

$$c_k \geqslant \sum_{i=1}^{m} c_i \, x_{ki}$$

IV.3. - On considère le programme canonique :

$$\underset{x_1,\ldots,x_6}{\text{Max}} \quad x_1 + 4x_2 + 2x_3 \qquad \text{sous} \begin{cases} \forall i = 1,\ldots,6, \quad x_i \geqslant 0 \\ x_1 + x_2 + x_4 = 1 \\ 2x_1 + x_2 - x_3 + x_5 = 2 \\ -x_1 + 2x_2 + x_3 + x_6 = 1 \end{cases}$$

a) Expliciter la suite de sommets correspondants aux bases extraites (P_4, P_5, P_6), (P_2, P_4, P_5), (P_1, P_2, P_5), (P_1, P_3, P_5).

b) Quelles sont les valeurs correspondantes de la fonction objectif ?

c) Vérifier que la dernière base (P_1, P_3, P_5) correspond à une solution du programme.

V

Etant donné un vecteur X, la notation $X \geqslant 0$ signifie que ce vecteur a toutes ses composantes positives. Si A est une matrice, ${}^tA$ désigne sa transposée. On se propose dans cette partie de préciser les liens entre le programme initial $(\mathcal{P}I)$:

$$(\mathcal{P}I) \qquad \underset{X \in \mathbb{R}^n}{\text{Max}} \; cX \qquad \text{sous} \begin{cases} X \geqslant 0, \\ AX = b, \end{cases}$$

et le programme suivant $(\mathcal{P}II)$:

$$(\mathcal{P}II) \qquad \underset{Y \in \mathbb{R}^m}{\text{Min}} \; {}^tbY \qquad \text{sous } {}^tAY \geqslant {}^tc.$$

V.1. - Soient X un vecteur appartenant à l'ensemble des réalisables du programme $(\mathcal{P}I)$, Y un vecteur de l'ensemble des réalisables du programme $(\mathcal{P}II)$ (c'est-à-dire tel que ${}^tAY \geqslant {}^tc$), établir l'inégalité : $c\,X \leqslant {}^tb\,Y$.

V.2. - Soient X_0 et Y_0 des réalisables respectifs des problèmes $(\mathcal{P}I)$ et $(\mathcal{P}II)$ tels que $c\,X_0 = {}^tb\,Y_0$, vérifier que X_0 est solution de $(\mathcal{P}I)$ et Y_0 est solution de $(\mathcal{P}II)$.

V.3. - Montrer que pour de tels vecteurs X_0 et Y_0, on a $({}^tY_0\,A - c)\,X_0 = 0$. En déduire que, si la composante d'indice j de X_0 est strictement positive, la j^e contrainte du problème (II) est à l'égalité.

V.4. - On considère le programme décrit en IV.3.

a) Ecrire le problème $(\mathcal{P}II)$ associé.

b) En utilisant la question V.3 et le fait que X_0 peut être associé à la base (P_1, P_3, P_5), déterminer une solution Y_0 du programme $(\mathcal{P}II)$.

* *
*

www.tunisie-etudes.info

Ce document a été téléchargé depuis
www.tunisie-etudes.info

Des documents gratuits, devoirs, examens, cours, exercices, corrigés... Ainsi que toute une rubrique pour vous aider à trouver un emploi sans oublier les avis de concours en direct

Notre page Twitter :
http://www.twitter.com/TunisieEtudes
Notre page FaceBook :
http://www.facebook.com/TunisieEtudes



Merci d'avoir choisi www.tunisie-etudes.info
Bonne lecture et bon travail